Option "Mathématiques" (M')

MATHEMATIQUES II

Durée : 4 heures

Les parties II *et* III *sont indépendantes de la partie* I

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On admettra le résultat suivant : soit D un compact de $\mathbb{R}^2$ admettant les définitions suivantes :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad a \leq x \leq b , \quad f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

et

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad c \leq y \leq d , \quad g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

où f_1 et f_2 (resp. g_1 et g_2) sont des fonctions numériques continues sur le segment $[a, b]$ (resp. $[c, d]$) telles que $f_1 \leqslant f_2$ (resp. $g_1 \leqslant g_2$) ; alors, si f est une fonction à valeurs complexes continue sur D, on a :

$$\int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

I

Soit E l'ensemble des fonctions à valeurs complexes continues sur $\mathbb{R}$, périodiques de période 2π. A tout couple de fonctions (f, g) de E, on associe la fonction $f * g$ définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)\, g(t)\, dt$$

1° Montrer que $f * g$ appartient à E.

2° Montrer que le groupe additif E (pour l'addition usuelle des fonctions) muni de la multiplication $*$ est un anneau commutatif.

3° Montrer que cet anneau n'est pas unitaire.

4° Cet anneau est-il intègre?

5° On appelle polynôme trigonométrique une fonction p de la forme :

$$t \longmapsto p(t) = \sum_{p=-n}^{n} a_p\, e^{ipt}$$

où n est un entier $\geqslant 0$ et les coefficients a_p des nombres complexes.

a. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on considère le polynôme trigonométrique

$$p_k(t) = c_k \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k , \quad t \in \mathbb{R}$$

où c_k est une constante déterminée de façon que

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_k(t)\, dt = 1.$$

Montrer que la suite $(p_k(0))_{k \geq 1}$ ne tend pas vers 0 et que, pour tout $\delta > 0$, la suite $(p_k)_{k \geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur l'ensemble

$$I_\delta = \{ t \in \mathbb{R} ; \delta \leq |t| \leq \pi \}.$$

b. Soit f appartenant à E. Pour tout entier $k \geq 1$, on pose $q_k = f * p_k$. Montrer que q_k est un polynôme trigonométrique et que la suite $(q_k)_{k \geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

II

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(t) = e^t \cdot e^{-e^t} = e^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{kt}}{k!}$$

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose : $h_n(t) = n\, h(nt)$.

Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\, dt$.

1° Montrer que si f est une fonction à valeurs complexes continue et bornée sur le segment $[a, b]$ avec $a < 0 < b$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t)\, h_n(t)\, dt = f(0).$$

.../...

E.N.S. SAINT-CLOUD & FONTENAY 1978

2° Soit f une fonction à valeurs complexes continue sur $[0, T]$ avec $T > 0$.

a. Montrer que pour tout $t, 0 < t < T$, on a :

$$f(t) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^T f(s)\ h_n(s-t)\ ds.$$

b. En déduire que s'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$\left| \int_0^T e^{nt} f(t)\ dt \right| \leq M$$

alors f est identiquement nulle sur $[0, T]$.

c. En déduire que si pour tout entier $n \geqslant 0$, $\int_0^T t^n f(t)\ dt = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[0, T]$.

III

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes continues sur $[0, +\infty[$. A tout couple de fonctions (f, g) de $\mathcal{E}$, on associe la fonction $f * g$ définie par : pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)\ g(t)\ dt.$$

1° Montrer que $f * g$ appartient à $\mathcal{E}$ et que le groupe additif $\mathcal{E}$ (pour l'addition usuelle des fonctions) muni de la multiplication $*$ est un anneau commutatif non unitaire.

2° Soit f appartenant à $\mathcal{E}$.

a. On pose $e_n(t) = e^{nt}$ pour $t \geqslant 0$ et n entier $\geqslant 0$. Montrer que l'on peut écrire pour tout $t \geqslant 0$:

$$[e_n * (f * f)](t) = \iint_\Delta e^{n(v+w)} f(T-v)\ f(T-w)\ dv\ dw$$

où $\quad T = t/2 \quad$ et $\quad \Delta = \{(v, w)\ ;\ v + w \geq 0,\ v \leq T,\ w \leq T\}$.

b. Soient

$$M = \operatorname{Max}_{0 \leqslant \sigma \leqslant 2T} |f(\sigma)| \quad \text{et} \quad \Delta' = \{(v, w)\ ;\ v + w \leqslant 0,\ v \geqslant -T, w \geqslant -T\}.$$

Montrer que :

$$\left| \iint_{\Delta'} e^{n(v+w)} f(T-v)\ f(T-w)\ dv\ dw \right| \leq 2\, M^2\, T^2.$$

c. On suppose que $f * f = 0$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout $T \geqslant 0$, on a :

$$\left| \int_0^T e^{nv} f(T-v)\ dv \right| \leq MT\ (1 + \sqrt{2}).$$

En déduire que f est identiquement nulle.

3° Soit A l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à une fonction f associe la fonction Af définie par : $(Af)(t) = tf(t)$, $t \geqslant 0$.

a. Montrer que, pour f et g appartenant à $\mathcal{E}$, on a :

$$A(f * g) = Af * g + f * Ag.$$

b. Soient f et g appartenant à $\mathcal{E}$ telles que $f * g = 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $f * A^n g = 0$ où l'on a posé $A^1 = A$ et $A^n = A \circ A^{n-1}$ pour $n > 1$.

c. En déduire que l'anneau $\mathcal{E}$ est intègre.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail